ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERİN A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Şeyda SEZGEK, İlhan DAĞADUR

Mersin Üniversitesi, Matematik Bölümü

14. Matematik Sempozyumu, NİĞDE

14-16.05.2015

ÖZET

Bu çalışmada çift indisli dizilerin A-istatistiksel yakınsaklığı, A-istatistiksel monotonluğu ve çift indisli diziler için upper-lower peak point kavramları ele alınmış ve konuya ilişkin çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir.

TEMEL KAVRAMLAR

$\mathbb{N}$ doğal sayıların kümesi olmak üzere, $K \subset \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $(j,k) \leqslant (n,m)$ ifadesi $j \leqslant n,\ \ k \leqslant m$ olmak üzere

$$K(n,m) := \{(j,k) \in K \ \ : \ \ (j,k) \leqslant (n,m)\}$$

olsun. Bu durumda, $|K(n,m)|$ ile $K(n,m)$ kümesinin eleman sayısı gösterilmek üzere $\lim_{n,m\to\infty} \frac{|K(n,m)|}{nm}$ limiti mevcut ve sonlu ise bu limite $K \subset \mathbb{N}^2$ kümesinin asimtotik yoğunluğu denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\delta^{(2)}(K(n,m)) := \lim_{n,m\to\infty} \frac{|K(n,m)|}{nm}.$$

Definition

$x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $j, k > N$ olduğunda $|x_{jk} - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ mevcut ise $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır (P-yakınsak) denir.

Definition

$x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer her $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ için $|x_{jk}| < M$ olacak şekilde bir M sayısı mevcut ise $x = (x_{jk})$ dizisine sınırlıdır denir ve

$$\| x \|_{(\infty,2)} := \sup_{j,k} |x_{jk}| < \infty$$

biçiminde gösterilir.

Definition

Eğer her ε pozitif sayısı için

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \mid \{(j,k) : j \leq n, k \leq m, \mid x_{jk} - L \mid \geq \varepsilon\} \mid = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_2 - \lim x = L$ şeklinde gösterilir.

Definition

$A = (a_{nmjk})$ 4 boyutlu bir matris olsun. Eğer her P-yakınsak sınırlı diziyi aynı P-limitiyle P-yakınsak diziye dönüştürüyorsa bu matrise RH-regülerdir denir.

4-boyutlu matris dönüşümlerinin regülerliği için gerek ve yeter koşul aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Theorem

(Hamilton(1936), Robinson(1926)) A 4-boyutlu matrisi RH-regülerdir ancak ve ancak

$RH_1: \quad \lim_{n,m\to\infty} a_{nmjk} = 0$ *for each* $(j,k) \in \mathbb{N}^2$;

$RH_2: \quad \lim_{n,m\to\infty} \sum_{j,k} | a_{nmjk} | = 1$;

$RH_3: \quad \lim_{n,m\to\infty} \sum_{j} | a_{nmjk} | = 0$ *for each* k;

$RH_4: \quad \lim_{n,m\to\infty} \sum_{k} | a_{nmjk} | = 0$ *for each* j;

$RH_5: \quad \sum_{j,k} a_{nmjk}$ *is P-convergent* ;

$RH_6: \quad$ *A, B sonlu pozitif tamsayıları vardır öyleki her* $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ *için* $\sum_{j,k>B} a_{nmjk} < A$.

Yukarıdaki tanımda özel olarak A=(C,1,1) Cesàro matrisi alınırsa klasikte bilinen A-istatistiksel yakınsaklık tanımı elde edilir. Ayrıca $K \subset \mathbb{N}^2$ için A-yoğunluk aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta_A^{(2)}(K) := \lim_{n,m\to\infty} \sum_{(j,k)\in K} a_{nmjk}.$$

Definition

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $K(\varepsilon) := \{(j,k) \ : \ (j,k) \leqslant (n,m), \ |x_{jk} - l| \geqslant \varepsilon\}$ kümesinin A-yoğunluğu sıfır ise $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi $l \in \mathbb{R}$ ye A-istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu çalışma boyunca da $A = (a_{nmjk})$ negatif olmayan ve regüler matris olarak alınmıştır.

ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERİN A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞIYLA İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

Burada hemen belirtelim ki, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ tüm kompleks değerli çift indisli dizilerin uzayı olmak üzere birçok durumda, özellikle f $\mathbb{N}^2$ nin çarpımsal bir yapısı olması halinde, $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ aritmetik fonksiyonların uzayı olarak belirtilir.

$d_A : \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2} \times \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2} \to [0, \infty)$ fonksiyonu $x = (x_{jk})$, $y = (y_{jk}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ olmak üzere

$$d_A(x, y) := \limsup_{n,m \to \infty} \sum_{(j,k) \leq (n,m)} a_{nmjk} \, \varphi(|x_{jk} - y_{jk}|)$$

ve φ fonksiyonu $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$\varphi(t) := \begin{cases} t & , \quad t \leqslant 1 \\ 1 & , \quad t > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Theorem

$x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. x dizisi l reel sayısına A-istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak her $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ için $y_{jk} = l$ olduğunda $d_A(x,y) = 0$ dır.

Teoreme ilişkin bir sonuç aşağıda verilmiştir.

Corollary

$x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. x dizisi l reel sayısına yakınsak (alışılmış anlamda) ise her $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ için $y_{jk} = l$ olduğunda $d_A(x,y) = 0$ dır.

Yukarıdaki sonucun tersi her zaman doğru değildir.

Bunu görmek için $A = (a_{nmjk})$ regüler matrisini

$$a_{nmjk} := \begin{cases} \frac{1}{nm} & , \quad (j,k) \leqslant (n,m) \\ 0 & , \quad (j,k) > (n,m) \end{cases}$$

ve $x = (x_{jk})$ dizisini

$$x_{jk} = \begin{cases} \sqrt{jk}, & j = n^2 \quad ve \quad k = m^2 \qquad (n, m = 1, 2, ...) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde seçebiliriz.

$$
\begin{aligned}
d_A(x,0) &= \limsup_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \sum_{(j,k)\leq(n,m)} \varphi(|x_{jk}-0|) \\
&= \limsup_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \sum_{(j,k)=(1,1)}^{(n,m)} \varphi(|x_{jk}|) = 0
\end{aligned}
$$

olduğu açıktır. Fakat $x = (x_{jk})$ dizisi alışılmış anlamda 0'a yakınsamaz.

f aritmetik fonksiyon olsun. Bu durumda f'nin A-değeri $M_A(f)$ olup

$$M_A(f) := \lim_{n,m\to\infty} \sum_{(j,k)\leq(n,m)} a_{nmjk}\, f(jk)$$

şeklinde tanımlanır.

Theorem

$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ sınırlı ve L'ye A-istatistiksel yakınsak ve H sonlu A-yoğunluğuna sahip $\mathbb{N}^2$' nin herhangi bir altkümesi olsun. O zaman $M_A(1_H f) = L\delta_A^{(2)}(H)$ sağlanır.

A-İSTATİSTİKSEL MONOTON ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER

Definition

$\mathbb{N}^2$ nin $\delta_A^{(2)}(H) = 1$ şartını sağlayan bir H altkümesi üzerinde $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi artan (azalan) ise bu diziye A-istatistiksel monoton artandır (azalandır) denir.

Eğer bir $x = (x_{jk})$ dizisi A-istatistiksel monoton artan ya da A-istatistiksel monoton azalan ise bu diziye A-istatistiksel monotondur denir.

Önerme:

Eğer $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi monoton ise A-istatistiksel monotondur. Tersi doğru değildir.

Bunu görmek için $A = (C, 1, 1)$ matrisini ve

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & j = n^2 \;\; ve \;\; k = m^2 \qquad (n, \;\; m = 1, 2, \ldots) \\ jk, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini gözönüne alalım. $x = (x_{jk})$ dizisi A-istatistiksel monoton artandır ancak monoton artan değildir.

Theorem

Eğer $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi A-istatistiksel monoton artan ya da A-istatistiksel monoton azalan ise sırasıyla

$$\{(j,k) \ : \ (j,k) \in \mathbb{N}^2, \ x_{j+1,k+1} < x_{jk}\}$$

ya da

$$\{(j,k) \ : \ (j,k) \in \mathbb{N}^2, \ x_{j+1,k+1} > x_{jk}\}$$

kümesinin A-yoğunluğu 0'dır.

Teoremin tersi doğru değildir.

A=(C,1,1) matrisini ve

$$x_{mn} = \begin{cases} 1, & (2^i, 2^j) \leq (m, n) < (2^{i+1} - 1, 2^{j+1} - 1) \qquad i, j \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

çift indisli dizisini göz önüne alalım. Bu dizi için $\{(j, k) \ : \ (j, k) \in \mathbb{N}^2, \ x_{j+1,k+1} < x_{jk}\}$ kümesinin A-yoğunluğu 0'dır ancak $x = (x_{mn})$ dizisi A-istatistiksel monoton artan değildir.

Theorem

$x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi sınırlı ve A-istatistiksel monoton ise A-istatistiksel yakınsaktır.

Genel olarak, A-istatistiksel monoton çift indisli dizilerin sınırlılığı A-istatistiksel yakınsaklık için yeterlidir fakat gerekli değildir. Örneğin; $A = (C, 1, 1)$ matrisini ve

$$x_{jk} = \begin{cases} nm & (j,k) = (n^2, m^2) \quad , \quad (n, m \in \mathbb{N}) \\ \frac{1}{nm} & (j,k) \neq (n^2, m^2) \end{cases}$$

şeklindeki $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisini gözönüne alalım.$x = (x_{jk})$ dizisi sınırlı değildir fakat istatistiksel monoton azalan ve 0'a istatistiksel yakınsaktır.

Sınırlı çift indisli dizilerde A-istatistiksel yakınsaklık için A-istatistiksel monotonluk yeterlidir fakat gerekli değildir.

$A = (C, 1, 1)$ matrisini ve

$$x_{jk} := \begin{cases} \frac{1}{nm} & , \quad n \ \ ve \ \ m \ \ tek \\ -\frac{1}{nm} & , \quad n \ \ ya \ da \ \ m \ \ \text{çift} \end{cases}$$

$x = (x_{jk})$ çift indisli dizisini gözönüne alalım. $x = (x_{jk})$ sınırlı ve 0'a istatistiksel yakınsaktır fakat istatistiksel monoton değildir.

Definition

$x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. En az bir $M > 0$ sayısı için

$$\delta_A^{(2)}(\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \ : \ |x_{jk}| > M\}) = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ dizisine A-istatistiksel sınırlıdır denir.

A-istatistiksel yakınsaklık için sınırlılık ve A-istatistiksel monotonluk yeterlidir fakat gerekli değildir.

Örneğin; $A = (C, 1, 1)$ matrisini ve

$$x_{jk} = \begin{cases} jk & , \quad jk \quad tek \quad kare \quad ise \\ 2 & , \quad jk \quad \text{çift} \quad kare \quad ise \\ \frac{1}{jk} & , \quad jk \quad tek \quad kare \quad \text{değilse} \\ -\frac{1}{jk} & , \quad jk \quad \text{çift} \quad kare \quad \text{değilse} \end{cases}$$

dizisini ele alalım. $x = (x_{jk})$ dizisi 0'a istatistiksel yakınsaktır ancak ne A-istatistiksel sınırlıdır ne de istatistiksel monotondur.

Theorem

A-istatistiksel monoton $x = (x_{jk})$ *çift indisli dizisi A-istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak A-istatistiksel sınırlıdır.*

A-İSTATİSTİKSEL MONOTONLUK VE ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER İÇİN PEAK POINT KAVRAMI

Definition

i) $x = (x_{nm})$ çift indisli bir dizi olsun. Her $k \geqslant k_0$ için $x_{jk_0} \geqslant x_{jk}$ (ya da $x_{jk} \geqslant x_{jk_0}$) ise x_{jk_0} elemanına $x = (x_{nm})$ dizisi için satır upper(ya da satır lower) peak nokta denir.

ii) $x = (x_{nm})$ çift indisli bir dizi olsun. Her $j \geqslant j_0$ için $x_{j_0k} \geqslant x_{jk}$ (ya da $x_{jk} \geqslant x_{j_0k}$) ise x_{j_0k} elemanına $x = (x_{nm})$ dizisi için sütun upper(ya da sütun lower) peak nokta denir.

(iii) $x = (x_{nm})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer (i) ve (ii) sağlanırsa $x_{j_0k_0}$ elemanına $x = (x_{nm})$ dizisi için upper (ya da lower) peak nokta denir.

Theorem

Eğer $x = (x_{nm})$ *çift indisli dizisinin peak noktalarının indeks kümesinin A-yoğunluğu 1 ise* $x = (x_{nm})$ *dizisi A-istatistiksel monotondur.*

C_λ ve D_λ ALT METODLARINA İLİŞKİN SONUÇLAR

$\lambda = \lambda(n)$, $\lambda(0) = 0$ olacak şekilde pozitif tamsayıların kesin artan bir dizisi olsun. $\mathbb{N}^2$ nin bir K altkümesinin asimtotik C_λ ve D_λ yoğunlukları sırasıyla

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{\lambda(n)\lambda(m)} \left|\{(j,k) \ : \ (j,k) \leqslant (\lambda(n),\lambda(m)),\ (j,k) \in K\}\right|$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{\lambda(n)\lambda(m) - \lambda(n-1)\lambda(m-1)} A_\lambda(n,m)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A_\lambda(n,m)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} & A_\lambda(n,m) \\ = \; & |\{(j,k) \in K : \lambda(n-1)+1 \leqslant j \leqslant \lambda(n), \lambda(m-1)+1 \leqslant k \leqslant \lambda(m)\} \end{aligned}$$

Theorem

$x = (x_{nm})$ çift indisli dizisi D_λ-istatistiksel monoton ise C_λ-istatistiksel monotondur.

Theorem

$\{\lambda(n)\}$, $\lambda(0) = 0$ olacak şekilde doğal sayıların artan bir dizisi olsun. O zaman C_λ-istatistiksel monoton dizi aynı zamanda D_λ-istatistiksel monotondur ancak ve ancak

$$\liminf_{n,m\to\infty} \frac{\lambda(n)\lambda(m)}{\lambda(n-1)\lambda(m-1)} > 1.$$

Corollary

$E = \{\lambda(n)\}$ ve $F = \{\mu(n)\}$ doğal sayıların iki altkümesi olsun. $F - E$ sonlu ise C_λ-istatistiksel (D_λ-st.) monotonluk C_μ-istatistiksel (D_μ-st.) monotonluğu verir.

Corollary

$F \Delta E$ sonlu olsun. C_λ (D_λ) istatistiksel monoton dizi aynı zamanda C_μ (D_μ) istatistiksel monotondur ve tersi de gerçeklenir.

Corollary

$E = \{\lambda(n)\}$ doğal sayıların sonsuz bir altkümesi ve

$$\limsup_{n,m\to\infty} \frac{\lambda(n+1)\lambda(m+1)}{\lambda(n)\lambda(m)} = 1$$

olsun. Bu durumda $x = (x_{nm})$ çift indisli dizisi C_λ-istatistiksel monotondur ancak ve ancak istatistiksel monotondur.

KAYNAKLAR

[1] R. P. Agnew, On deferred Cesàro Mean, Ann. of Math.,33 (1932), 413-421.

[2] M. Altınok, M. Küçükaslan, A-Statistical Convergence and A-Statistical Monotonicity, Applied Math. E-Notes, 13 (2013), 249-260.

[3] Armitage D.H., Maddox I.J., A new type of Cesaro Mean, Analysis, 9 (1989) 195-204.

[4] R.C. Buck, The measure theoretic approach to density, Amer. J. Math., 68 (1946), 560-580.

[5] R. C. Buck, Generalized asymptotic density, Amer. J. Math., 75 (1953), 335-346.

[6] H. Fast, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2 (1951), 241-244.

[7] J. A. Fridy, On statistical convergence, Analysis, (1985), 301-313.

[8] J. A. Fridy, Statistical limit points, Proceeding of the American Mathematical Socaity, Vol.118, no.4 (1993), 1187-1192.

[9] J.A. Fridy and H. I. Miller, A matrix characterization of statistical convergence, Analysis, 11 (1991), 59-66.

[10] J. A. Fridy, C. Orhan, Statistical limit superior and statistical limit inferior, Proc. of American Math. Soc. Vol.125, no. 12, (1997) 3625-3631.

[11] E. Kaya, M. Küçükaslan, R. Wagner, On statistical convergence and statistical monotonicity, Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. comp., 39, (2013), 257, 270.

[12] P. Kostyrko, M. Macaj, T. Salat, O. Strouch, On statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 129, no 9, (2000), 2647-2654.

[13] L. Kupers, M. Niederreiter, Uniform distribution of sequences, Wiley, New York, 1974.
[14] Osikiewicz J.A., Summability of Matrix Submethods and Spliced sequences, PH.D. Thesis, August 90 pp. (1997).
[15] Pringsheim A., Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, mathemathische Annalen 53, (1900), 289-321.
[16] Robison G. M., Divergent Double Sequences and Series, Trans. of the American Math. Soc., 28, 1, (1926), 50-73.

[17] T. Salat, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30, no. 2, (1980), 139-150.

[18] H. Steinhaus, Sur la convergence ordinaine et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2 (1951), 73-74.

[19] Yılmaztürk M., Küçükaslan M., On strongly deferred Cesaro summability and deferred statistical convergence of the sequences, Bitlis Eren Univ. J. Sci. and Technology, 3 (2013) 22-25.

[20] Maddox I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge Univ. Press, 1970.

DİNLEDİĞİNİZ İÇİN TEŞEKKÜR EDERİM