

## 5-boyutlu Politrop

Mustafa SALTİ  
Mersin University,  
Turkey  
msalti@mersin.edu.tr

Kenan SOGUT  
Mersin University,  
Turkey  
kenansogut@mersin.edu.tr

Ahmet TAS  
Mersin University,  
Turkey  
aahmet.tas@gmail.com

Oktay AYDOĞDU  
Mersin University,  
Turkey  
oktaydogdu@mersin.edu.tr

### Özet:

Politrop kendiliğinden-kütlesel-çekimli bir gaz küresi olarak bilinir ve daha gerçekçi yıldız modellerine bir yaklaşım olarak çok faydalıdır. Araştırmamıza hidrostatik dengede küresel bir yıldız varsayarak başlayacağız. Bu çalışmanın temel amacı Politropları ifade eden enerji yoğunluğunu beş-boyutlu (5B) Kaluza-Klein evreninde yeniden yazmaktır. Politropik enerji yoğunluğunun 5B biçimini kullanarak daha anlamlı kozmolojik sonuçlar elde edilebilecektir. Çalışmamızda bununla beraber, elde edilen sonuçlar nümerik olarak tartışılarak güncel gözlemsel verilerle karşılaştırmıştır.

*Anahtar Kelimeler: Evrenbilim, Politrop, Karanlık enerji, Beş boyut, 5B.*

## 5-dimesional Polytrope

### Abstract:

Polytrope is known as a self-gravitating gaseous sphere and very useful as crude approximation to more realistic stellar models. We start our investigation with assuming a spherical star in a hydrostatic equilibrium. The main purpose of this study is to rewrite energy density describing Polytropes in five-dimensional (5D) Kaluza-Klein universe. We believe that after making use of the 5D form of the Polytropic energy density, we can find meaningful cosmological results. Additionally, we discuss our results numerically in order to compare them with the recent observational data.

*Keywords: Cosmology, Polytrope, Dark energy, Five dimensions, 5D.*

## GİRİŞ

Yapı oluşumu için adyabatik soğuk karanlık maddenin azalması ile birlikte kozmik ahenk bulmacası başlar [1]. Gökbilimciler, yaklaşık 20 yıl kadar önce, soğuk karanlık madde için yapılan sanal benzetme deneyleri sonucunda büyük ölçekli yapının büyümesinden biçim değişkeni için şu değeri öngörmüşlerdir [2]:

$$Y = \Omega_m \eta \approx 0.25. \quad (1)$$

Bu veri güncel gözlemsel sonuçlarla çok iyi uyuşmaktaydı. Sonrasında, ortaya çıkan bu ilginç görüntü farklı kozmolojik verilerle desteklenmiştir: gözlemsel supernovae tip Ia verileri [3, 4], kozmik mikrodalga ardalanı [5], büyük ölçekli yapılar [6], Wilkinson mikrodalga izotropi sondası [7-9], Sloan

dijital gökyüzü incelemesi [10] ve Planck gözlemleri [11, 12]. Tüm bu gözlemlerin ortak sonucu olarak evrenimizin tahmin edilenden daha hızlı genişleme davranışının nedeni olarak, bildiğimiz maddeye benzemeyen ve negatif basınca sahip olan karanlık madde ile karanlık enerji gösterilir. Karanlık içerikler doğrudan gözlenemediğinden dolayı evrendeki baskın bileşenlerin bildiğimiz madde ya da enerjiye benzediği henüz doğrulanmamıştır.

Diğer yandan karanlık bileşenler için birçok kuramsal modelleme ortaya konmuştur. En basit olan kozmolojik sabit ( $\Lambda$ ) karanlık enerji modeli olup bu fikri betimleyen enerji yoğunluğu ve durum-denklemleri parametresi ifadeleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2)$$

$$\omega_{\Lambda} = -1. \quad (3)$$

Buradaki  $G$  çarpanı kütle-çekimsel sabit olarak bilinmektedir.

İlk ve en basit bakış açısı olmasının yansıra ne yazık ki kozmolojik sabit modeli gözlemsel verilerle karşılaştırıldığında bazı kusurları ortaya çıkmaktadır [13, 14]. Bu durum kuramsal kozmologları farklı yöntemler geliştirmeye yönlendirmiştir. Bunlardan ilki değişimli kütleçekim kuramları (ayrıntılı bir inceleme için kaynak [15] ve oradaki kaynaklar kullanılabilir), ikinci ise evrenin karanlık bileşen bölgesi olduğunu varsaymaktır (bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgilere ulaşmak için kaynak [14] ile birlikte orada verilen kaynaklar incelenebilir). Bunlara ek olarak çok daha farklı fikirler de üretilmiştir: bütünsel karanlık madde-enerji yoğunlukları (Chaplygin [16, 17] ve Politropik [18, 19] gaz modelleri), ekstra boyut içeren kuramlar [20-22], skaler ve vektör alanları [23-27] ve karanlık enerji yoğunluğu tanımlamaları [28-31]. Literatüre girmiş çok sayıda kuramsal model olmasına rağmen bunlar arasından gözlemsel verilerle tam olarak uyumlu sonuçlar vermesi bakımından sıyrılarak öne çıkan bir yöntem yoktur. Bu nedenle evrenin ivmeli genişlemesi sürecini açıklayabilen kuramsal bir model elde edebilme arayışları devam etmektedir. Bu çalışmada 4B evren modeli göz önüne alınarak betimlenen Politropik gaz modelini daha anlamlı sonuçlar verebilecek biçimde yeniden ifade etmek için 5B Kaluza-Klein tipi uzay-zaman modeli temel alınarak enerji yoğunluğu ifadesi yeniden yazılmıştır.

### KARANLIK EVRENİN POLİTROP MODELİ

Chaplygin gaz modeli, literatüre girmiş bütünsel karanlık madde-enerji modellerinden bir tanesi olup sicim kuramından elde edilen Takyonik skaler alan modeli temel alınarak da türetilmektedir. Bu model kısaca

$$p_c = -\frac{B}{\rho} \quad (4)$$

biçimindeki durum denklemi ile betimlenmekte olup buradaki  $B$  çarpanı bir sabittir [16, 17]. Bununla birlikte Chaplygin gaz modeli bu haliyle gözlemsel verilerle uyuşmadığında farklı biçimlerde yeniden yazılmıştır. Literatürde *genelleştirilmiş* [17, 32-34], *modifiyeli* [17, 32, 34], *uzatılmış* [35], *değişken* [36], *değişken modifiyeli* [37] ve *değişken genelleştirilmiş* [38] Chaplygin gaz modelleri gibi farklı tanımlamalar ortaya atılmıştır. Bu çalışmada farklı ve ilginç diğer bir bütünsel karanlık madde-enerji modeli olan Politropik gaz modeli göz önüne alınmaktadır. Politropik gaz modeli genel olarak aşağıdaki biçimde yazılan durum denklemi ile ifade edilmektedir [18, 19]:

$$p = \kappa \rho^{1+\frac{1}{m}}. \quad (5)$$

Yukarıda yazılan ifadedeki  $\kappa$  ve  $m$  birer sabit olup  $m$  ayrıca Politropik indeks olarak adlandırılmaktadır. Burada önemli bir durumun altını çizmekte fayda vardır: (5) numaralı denklem  $m = -0.5$  ve  $\kappa = -B$  seçimi yapıldığında *asil* Chaplygin gaz [16, 17] modelinin enerji yoğunluğu ifadesine indirgenmektedir. Dahası,  $m = -\frac{1}{1+\alpha}$  ve  $\kappa = -B$  yazıldığında ise Politropik enerji yoğunluğu ifadesi genelleştirilmiş Chaplygin gaz [17, 32-34] modeline dönüştürülebilmektedir.

### 5B POLİTROPİK GAZ

5B Kaluza-Klein kuramında Friedmann-Robertson-Walker tipi çizgi-elemanı aşağıdaki gibi yazılmaktadır [39]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + (1-kr^2)dx_5^2 \right]. \quad (6)$$

Bu modelde yer alan  $a(t)$  kozmik ölçek çarpanı,  $k$  ise eğrilik parametresi olarak bilinir ve buradaki  $k=0$ ,  $k=+1$  ve  $k=-1$  durumları sırası ile düz, açık ve kapalı evren biçimlerini gösterir. Supernovae tip Ia verileri [3, 4], Wilkinson mikrodalga izotropi sondası [7-9], Sloan dijital gökyüzü incelemesi [10], Planck [11, 12] ve X-Ray gözlemleri [40] büyük ölçeklerde uzaysal düz model öngörmektedir, bu nedenle bundan sonraki hesaplamalarda  $k=0$  seçimi yapılacaktır. Bu evrenin enerji-momentum dağılımı şu matematiksel bağıntı ile ifade edilecektir:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (7)$$

Buradaki tanımda  $\mu$  ve  $\nu$  indisleri (0, 1, 2, 3, 4) değerlerini almakta olup 0 zaman koordinatını 1-4 ise uzaysal koordinatları betimlemektedir. Bu tanım ile birlikte Einstein alan denklemleri şu biçimde yazılmaktadır:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G[(\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}] \quad (8)$$

Yukarıdaki denklemde karşımıza çıkan  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$  ve  $g_{\mu\nu}$  sırasıyla Ricci tensörü, Ricci skaleri ve metrik tensör olarak bilinmektedir, Ayrıca  $u_\mu$  ifadesi 5'li hız vektörü olup  $u_\mu u^\mu = 1$  denklemini sağlamaktadır. Buna göre, (6) numaralı denklemde verilen çizgi-elemanı (8) denkleminde kullanıldığında elde edilen Friedmann denklemleri şu biçimde bulunur:

$$H^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho, \quad (9)$$

$$2H^2 + \dot{H} = -\frac{8\pi G}{3}p. \quad (10)$$

Bu denklemler yazılırken Hubble genişleme parametresi olarak bilinen  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  tanımlaması yapılmış olup ikinci denklemde karşımıza çıkan *üst nokta* işareti zamana göre birinci merteben türevi ifade etmektedir.

Diğer yandan  $T_{;\nu}^{\mu\nu}$  korunum denklemi ya da (9) ve (10)'da verilen Friedmann denklemleri göz önüne alındığında aşağıdaki süreklilik denklemi elde edilir:

$$\dot{\rho} + 4H(\rho + p) = 0. \quad (11)$$

Kolaylık olması için bundan sonraki hesaplamalarda  $\frac{4\pi G}{3} = 1$  alınacaktır. Birkaç matematiksel işlem sonrasında (11) denklemi

$$d(\rho a^4) + p d(a^4) = 0. \quad (12)$$

biçiminde yazılır. Bu ifadede gerekli ara basamaklar tamamlandığında

$$\rho = \frac{1}{a^4} \left( \frac{4\kappa}{m} \int a^{-1-\frac{1}{m}} da + c \right)^{-m} \quad (13)$$

sonucu elde edilmekte olup buradaki  $c$  integral sabitidir. Sonrasında gerekli integral alma işlemleri tamamlandığında Politropik enerji yoğunluğu için aşağıdaki bağıntıya ulaşılır:

$$\rho = (c^m \sqrt{a^4} - \kappa)^{-m}. \quad (14)$$

Günümüz enerji yoğunluğu ( $\rho_g$ ) ile kozmolojik enerji yoğunluğu ( $\rho_k$ ) arasında

$$\rho_g = 1.31 \rho_k \quad (15)$$

biçimde bir ilişki vardır [35]. Buna göre,  $a = 1$  olduğunda  $\rho = 1.31$  elde edilmekte olup bu sonuç kullanıldığında integral sabiti için

$$c = \sqrt[m]{1.31} + \kappa \quad (16)$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan, (14) numaralı denklemde kullanılmak üzere  $\xi = \frac{c}{c-\kappa}$  parametresi tanımlandığında ilgili denklem aşağıdaki biçime dönüşmektedir

$$\rho = \sqrt[m]{(c - \kappa) \left( 1 - \xi + \xi a^{\frac{4}{m}} \right)}. \quad (17)$$

Bu sonucun gözlemsel verilerle uyumlu çıkarımlar verip vermediğini kontrol edebilmek için sonucumuzu kozmik kızıla kayma parametresi ( $z$ ) cinsinden yazmamız gerekiyor. Kozmik ölçek çarpanı ( $a$ ) ve kızıla kayma parametresi arasında

$$z = \frac{1}{a} - 1 \quad (18)$$

biçiminde bir ilişki bulunmaktadır. Buna göre Hubble parametresi için şu yeni tanım elde edilir:

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow H(z) = -\frac{\dot{z}}{1+z}. \quad (19)$$

Böylece (9), (16) ve (17) denklemlerinde Hubble parametresi için 5B Politropik gaz modelinden

$$H(z) = H_0 \left[ (c - \kappa)(1 - \xi + \xi(1+z)^{-\frac{4}{m}}) \right]^{\frac{m}{2}} \quad (20)$$

denkleminde verilen kuramsal ifade elde edilmektedir. Buradaki  $H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [12] kozmik Hubble parametresinin günümüz değeridir. Denklem (19)'dan görüldüğü gibi kuramsal ifade Politropik modelin öngördüğü iki serbest parametre olan  $m$  ve  $\kappa$ 'ya bağlıdır. Bu serbest parametrelerin uygun değerleri gözlemsel verilerle kuramsal sonucun karşılaştırıldığı sayısal analizlerden elde edilebilmektedir.

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada enerji yoğunluğu ve Hubble parametresi için yeni kuramsal ifadeler elde edilmiştir. Bu modelin tutarlılığı ve güvenilirliğini tartışmak için bazı sınamalar yapmak gerekmektedir. Ancak, bu sınamalar öncesinde bazı sayısal analizler yaparak modelde verilen serbest parametrelerin uygun değerleri belirlenmelidir. Bu analizlerden bazıları

- Gözlemsel  $H(z)$  verileri
- SNe-Ia verileri
- Baryon Akustik Salınımı (BAS) verileri

gibi gözlemlerden elde edilen sayısal verilere dayanmaktadır. Sayısal analizler sonrasında ise

- Tutarlılık analizleri (ses hızı gibi),
- Temel kozmolojik parametrelerin hesabı ve yorumlanması,
- Neo-klasik nicelikleri hesabı,
- Skaler alan karanlık enerji modellerinin yeniden inşa edilmesi,
- Evrenin yaşı hesabı,
- Termodinamik yasalarının tartışılmasıyla evrenin termodinamik özelliklerinin irdelenmesi

gibi yeni çalışmaların araştırma konuları olabilecek hesaplamalar yardımıyla modelin daha derinlemesine analizleri yapıp yeni ve farklı sonuçlar elde edilebilir.

**Teşekkür:** *Bu çalışma Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2018-1-AP4-2821 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.*

### KAYNAKLAR

- [1] J.P. Ostriker and P.J. Steinhardt, Nature 377 (1995) 600.
- [2] R. Cen and J.P. Ostriker, Astrophys. J. 538 (2000) 83.
- [3] S. Perlmutter, et al., Nature 391 (1998) 51.
- [4] S. Perlmutter, et al., Astrophys. J. 517 (1999) 565.
- [5] A.D. Miller, et al., Astrophys. J. Lett. 524 (1999) L1.
- [6] N.A. Bahcall, J.P. Ostriker, S. Perlmutter and P.J. Steinhardt, Science 284 (1999) 1481.
- [7] C.L. Bennett, et al., Astrophys. J. Suppl. 148 (2003) 1.
- [8] S.L. Brile, O. Lahav, J.P. Ostriker and P.J. Steinhardt, Science 299 (2003) 1532.
- [9] D.N. Spergel, et al., The Astrophysical Journal Supplement Series 148 (2003) 175.
- [10] M. Tegmark, et al., Phys. Rev. D 69 (2004) 103501.
- [11] P.A.R. Ade, et al., A&A 571 (2014) A12.
- [12] P.A.R. Ade, et al., A&A 594 (2016) A13.
- [13] V. Sahni and A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D 9 (2000) 373.
- [14] E.J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D 15 (2006) 1753.

- [15] S. Nojiri and S.D. Odintsov, *Int. J. Geom. Methods Mod. 4* (2007) 115.
- [16] A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, *Phys. Lett. B* 511 (2001) 265.
- [17] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, *Phys. Rev. D* 66 (2002) 043507.
- [18] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, (1939).
- [19] J. Christensen-Dalsgaard, *Lecture Notes on Stellar Structure and Evolution*, (Aarhus Univ. Press, Aarhus, (2004).
- [20] T. Kaluza, *Sits. Press. Akad. Wiss. Math. Phys. K* 1 (1921) 895.
- [21] O. Klein, *Zeits. Phys.* 37 (1926) 895.
- [22] G. Calcagni, *Phys. Rev. Lett.* 104 (2010) 251301.
- [23] A. Sen, *Lecture Notes in Phys.* 653 (2004) 141.
- [24] T. Chiba, T. Okabe, M. Yamaguchi, *Phys. Rev. D* 62 (2000) 023511.
- [25] B. Feng, X.L. Wang, X.M. Zhang, *Phys. Lett. B* 607 (2005) 35.
- [26] R.R. Caldwell, *Phys. Lett. B* 545 (2002) 204.
- [27] E.J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, *Internat. J. Modern Phys. D* 15 (2006) 1753.
- [28] Q.G. Huang, M. Li, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 08 (2004) 013.
- [29] V.F. Cardone, A. Troisi, S. Capozziello, *Phys. Rev. D* 69 (2004) 083517.
- [30] H. Wei, R.G. Cai, *Phys. Lett. B* 660 (2008) 113.
- [31] F.R. Urban, A.R. Zhitnitsky, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 0909 (2009) 018.
- [32] V. Gorini, A. Kamenshchik and U. Moschella, *Phys. Rev. D* 67 (2003) 063509.
- [33] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, *MNRAS* 344 (2003) 1057.
- [34] V. Sahni, T. D. Saini, A. A. Starobinsky and U. Alam, *JETP Lett.* 77 (2003) 201.
- [35] B. Pourhassan, *Physics of the Dark Universe* 13 (2016) 132.
- [36] J. Lu, *Phys. Lett. B* 680 (2009) 404.
- [37] D. Panigrahi, S. Chatterjee, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 05 (2016) 052.
- [38] D. Panigrahi, S. Chatterjee, *Gen. Rel. Gravit.* 49 (2017) 35.
- [39] C. Ozel, H. Kayhan and G.S. Khadekar, *Ad. Stud. Theor. Phys.* 4 (2010) 117.
- [40] S.W. Allen, et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 353 (2004) 457.